



# Etudes numeriques de raccords de structures elastiques de dimensions differentes

M. Aufranc

## ► To cite this version:

M. Aufranc. Etudes numeriques de raccords de structures elastiques de dimensions differentes. RR-0781, INRIA. 1988. inria-00075770

**HAL Id: inria-00075770**

**<https://hal.inria.fr/inria-00075770>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE  
IRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France

Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 781

**ETUDES NUMERIQUES DE  
RACCORDS DE STRUCTURES  
ELASTIQUES DE DIMENSIONS  
DIFFERENTES**

**Martial AUFRANC**

**FEVRIER 1988**

Etudes numériques de raccords  
de structures élastiques de dimensions différentes.

Martial AUFRANC (INRIA)

Numerical studies of junctions  
between different dimensions elastic structures.

Résumé :

Le point de départ de ce rapport est la modélisation de la jonction entre une structure tridimensionnelle et une plaque, proposée par P.G. Ciarlet , H. Le Dret et R. Nzengwa.

Nous proposons une simulation numérique de raccords de structures de dimensions différentes dans des cas relativement simples, ainsi que les résultats numériques de différents tests effectués à l'aide de la bibliothèque d'éléments finis MODULEF.

Abstract :

This report is based on the modeling of the junction between a tridimensional structure and a plate junction, as proposed by P.G. Ciarlet , H. Le Dret and R. Nzengwa.

We describe here a numerical simulation of junctions of different dimension structures in relatively simple cases, and we present numerical results of several problems where we have used the finite elements library MODULEF.



1 ) Rappel de [4] :

Soit le problème de référence  $\mathcal{P}_1$  suivant : on dispose d'un parallélépipède rectangle  $\mathcal{Q}_\beta^\epsilon$  muni d'une "fente"  $\Omega_\beta^\epsilon$  dans laquelle vient s'enficher une plaque  $\Omega^\epsilon$  de surface moyenne  $\omega$  d'épaisseur  $2\epsilon$ , l'autre extrémité de cette plaque,  $\Gamma_0^\epsilon$ , étant encastree.

On pose :

$$\omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < b_1, |x_2| < a_2\}; \Omega^\epsilon = \omega \times ]-\epsilon, \epsilon[$$

$$\gamma_0 = \{(b_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_2| \leq a_2\}; \Gamma_0^\epsilon = \gamma_0 \times ]-\epsilon, \epsilon[$$

$$\omega_\beta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \beta, |x_2| < a_2\}; \Omega_\beta^\epsilon = \omega_\beta \times ]-\epsilon, \epsilon[$$

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; -a_1 < x_1 < \beta, |x_2| < a_2, -a_3 < x_3 < b_3\}$$

$$\mathcal{Q}_\beta^\epsilon = \mathcal{Q} \setminus \bar{\Omega}_\beta^\epsilon \quad \mathcal{Q}^\epsilon = \text{int} (\{\mathcal{Q}_\beta^\epsilon \cup \Omega^\epsilon\}^-)$$

Inconnue : le déplacement  $u^\epsilon = (u_i^\epsilon) : \mathcal{Q}^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$

Données : a) la densité de force volumique  $f^\epsilon = (f_i^\epsilon) : \mathcal{Q}^\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$

on supposera pour simplifier que les forces de surface ont une densité nulle;

b) les constantes de Lamé  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$  relatives au massif,  $(\lambda^\epsilon, \mu^\epsilon)$  relatives à la plaque.

Conditions aux limites :  $u^\epsilon = 0$  sur  $\Gamma_0^\epsilon$ .

Remarques : . Dans ce qui précède,  $\epsilon$  est un paramètre adimensionnel

destiné à tendre vers zéro,  $\beta, a_1, b_1, a_2, a_3$  sont des constantes positives indépendantes de  $\epsilon$ , avec  $\beta < b_1$ .

. Dans ce qui suit, les indices latins prennent leur valeur dans  $\{1, 2, 3\}$ , les indices grecs dans  $\{1, 2\}$ , et on utilisera la convention d'Einstein pour la sommation des indices.

. Les matériaux ont été supposés homogènes isotropes.

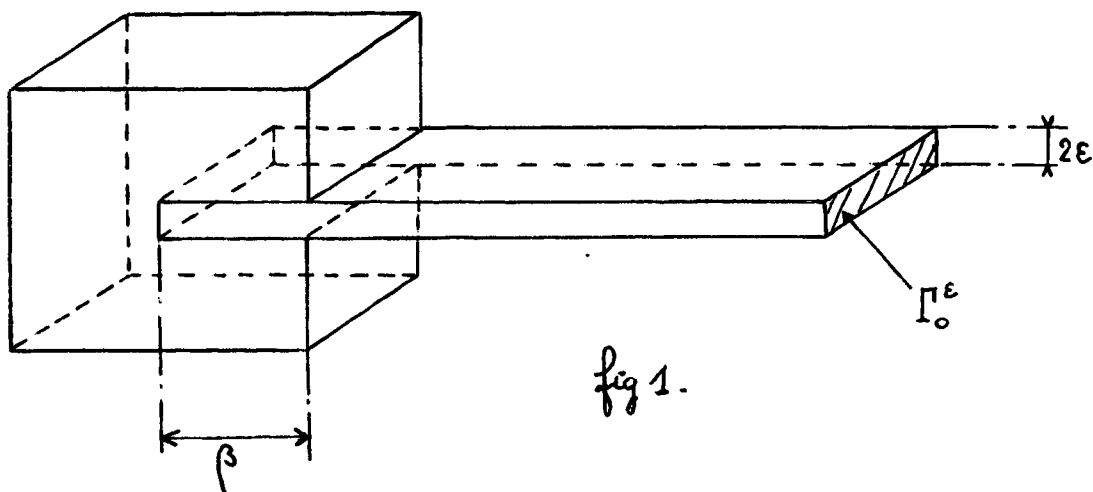


fig 1.

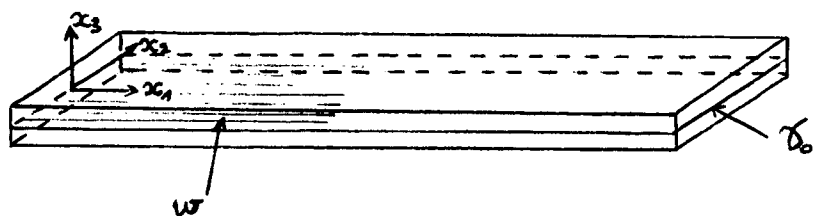


fig.2 :  $\Omega^\epsilon = \omega x ] -\epsilon, \epsilon[$

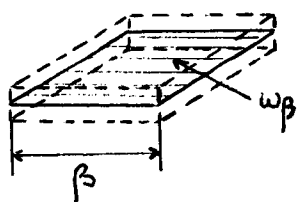


fig 3:  $\Omega_\beta^\epsilon = \omega_\beta x ] -\epsilon, \epsilon[$

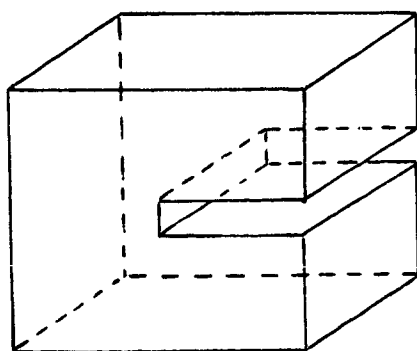


fig.4:  $\Theta_\beta^\epsilon$

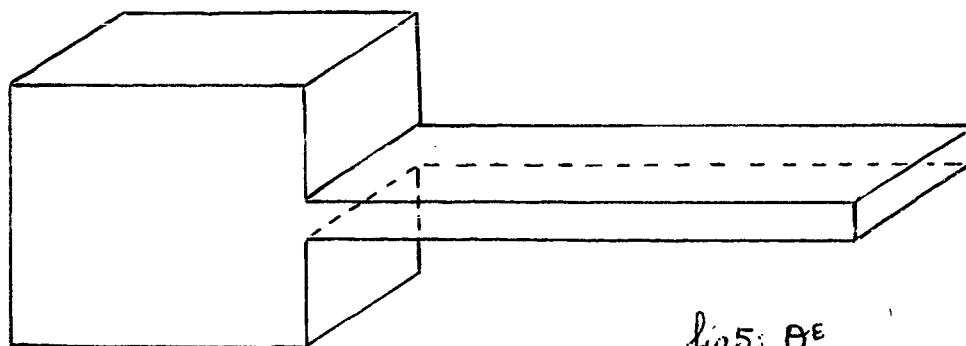


fig 5:  $\Theta^\epsilon$

$\mathcal{P}_1$  consiste donc à trouver :  $u^\epsilon \in V^\epsilon = \{v^\epsilon \in H^1(\mathcal{Q}^\epsilon); v^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\epsilon\}$

tel que :  $J^\epsilon(u^\epsilon) = \inf_{v^\epsilon \in V^\epsilon} J^\epsilon(v^\epsilon)$  avec :

$$(1) \quad J^\epsilon(v^\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}_\beta^\epsilon} \{ \tilde{\lambda} e_{pp}^\epsilon(v^\epsilon) e_{qq}^\epsilon(v^\epsilon) + 2 \tilde{\mu} e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) \} dx^\epsilon - \int_{\mathcal{Q}_\beta^\epsilon} f^\epsilon v^\epsilon dx^\epsilon$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\Omega^\epsilon} \{ \lambda^\epsilon e_{pp}^\epsilon(v^\epsilon) e_{qq}^\epsilon(v^\epsilon) + 2 \mu^\epsilon e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) \} dx^\epsilon - \int_{\Omega^\epsilon} f^\epsilon v^\epsilon dx^\epsilon$$

$$x^\epsilon = (x_i^\epsilon) \in \mathcal{Q}^\epsilon \quad 2e_{ij}^\epsilon(v^\epsilon) = \left( \frac{\partial v_i^\epsilon}{\partial x_j^\epsilon} + \frac{\partial v_j^\epsilon}{\partial x_i^\epsilon} \right)$$

On résout :

$$(2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}^\epsilon \{ \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) \} = f^\epsilon \text{ dans } \mathcal{Q}_\beta^\epsilon \\ -\operatorname{div}^\epsilon \{ \mathcal{A}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) \} = f^\epsilon \text{ dans } \Omega^\epsilon \\ u^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\epsilon \\ \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) n^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{Q}_\beta^\epsilon \setminus \partial \Omega^\epsilon \\ \mathcal{A}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) \nu^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial \Omega^\epsilon \setminus \partial \mathcal{Q}_\beta^\epsilon \\ \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) n^\epsilon + \mathcal{A}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) \nu^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial \mathcal{Q}_\beta^\epsilon \cap \partial \Omega^\epsilon \end{cases}$$

avec :  $\operatorname{div}^\epsilon$  divergence par rapport à la variable  $x^\epsilon$ .

$$(3) \quad \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) = \tilde{\lambda} (e_{pp}^\epsilon(u^\epsilon)) I + 2 \tilde{\mu} e^\epsilon(u^\epsilon)$$

$$(4) \quad \mathcal{A}^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon) = \lambda^\epsilon (e_{pp}^\epsilon(u^\epsilon)) I + 2 \mu^\epsilon e^\epsilon(u^\epsilon)$$

$n^\epsilon$  et  $\nu^\epsilon$  normales extérieures unitaires le long de  $\partial \mathcal{Q}_\beta^\epsilon$  et  $\partial \Omega^\epsilon$ ,  $e^\epsilon$  tenseur des déformations.

Remarque :

La dernière égalité de (2) apparaît comme la condition de transmission du problème tridimensionnel.

Lorsque l'on fait tendre le paramètre  $\epsilon$  vers zéro, la difficulté provient du fait que ouverts et espaces que l'on utilise dépendent de  $\epsilon$ . On pose donc le problème sur deux ouverts indépendants de  $\epsilon$  :

. à  $\Omega^\epsilon$  on associe  $\Omega = \omega \times ]-1, 1[$ , soit à  $x^\epsilon \in \Omega^\epsilon$  on associe :

$$x = (x_i) = (x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, \frac{1}{\epsilon} x_3^\epsilon)$$

. à  $\mathcal{Q}$  on associe  $\tilde{\mathcal{Q}}^\epsilon$ , translaté de  $\mathcal{Q}$  de vecteur  $r \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$\tilde{\mathcal{Q}}^\epsilon \cap \Omega = \emptyset, \text{ soit à } x^\epsilon \in \mathcal{Q} \text{ on associe } \tilde{x} = x^\epsilon + r.$$

Par ces transformations, on est amené à associer à la solution  $u^\epsilon$  de  $\mathcal{D}_1$  un couple :  $(\tilde{u}(\epsilon), u(\epsilon)) \in \text{Im } V^\epsilon$  avec :

$$\begin{aligned} \text{Im } V^\epsilon &= \{(\tilde{v}(\epsilon), v(\epsilon)), \tilde{v}(\epsilon) \in H^1(\tilde{\mathcal{Q}}), v(\epsilon) \in H^1(\Omega), v(\epsilon) = 0 \text{ sur } \Gamma_0^1, \text{ t.q.} \\ &\quad \tilde{v}_\alpha(\tilde{x}) = \epsilon v_\alpha(x), \tilde{v}_3(\tilde{x}) = v_3(x), \text{ en } \tilde{x} \in \tilde{\Omega}_\beta^\epsilon = \Omega_\beta^\epsilon + r \\ &\quad \text{et } x \in \Omega_\beta = \omega_\beta \times ]-1, 1[ \text{ en correspondance avec le même } x^\epsilon \in \Omega_\beta^\epsilon \} \end{aligned}$$

Pour cela, on aura posé au préalable :

$$(5) \quad \begin{cases} v_i^\epsilon(x^\epsilon) = \epsilon \tilde{v}_i(\tilde{x}) \text{ pour } x^\epsilon \in \tilde{\mathcal{Q}} \\ \tilde{v}_\alpha(\tilde{x}) = \epsilon^2 v_\alpha(x) \quad \tilde{v}_3(\tilde{x}) = \epsilon v_3(x) \text{ pour } x^3 \in \tilde{\Omega}^\epsilon. \end{cases}$$

Sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \tilde{\lambda} \text{ et } \tilde{\mu} \text{ indépendantes de } \epsilon \\ \lambda^\epsilon = \epsilon^{-3} \tilde{\lambda} \quad \mu^\epsilon = \epsilon^{-3} \tilde{\mu} \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} f_i^\epsilon(x^\epsilon) = \epsilon \tilde{f}_i(\tilde{x}) \text{ pour } x^\epsilon \in \tilde{\mathcal{Q}}_\beta^\epsilon \\ f_\alpha^\epsilon(x^\epsilon) = \epsilon^{-1} \tilde{f}_\alpha(x) \\ f_3^\epsilon(x^\epsilon) = \tilde{f}_3(x) \end{cases} \text{ pour } x^\epsilon \in \tilde{\Omega}^\epsilon$$

La famille  $(\tilde{u}(\epsilon), u(\epsilon))$  converge fortement dans  $H^1(\tilde{\mathcal{Q}}) \times H^1(\Omega)$  vers un élément  $(\tilde{u}, u)$  obtenu comme suit :

a)  $u \in H^1(\Omega)$ , est nul sur  $\Gamma_0^1$  et est un champ de Kirchhoff-Love dans  $\Omega$ , c'est à dire qu'il existe  $\xi_\alpha \in H^1(\omega)$ ,  $\xi_3 \in H^2(\omega)$  tels que :

$$\xi_i = \partial_\nu \xi_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0 \text{ et } \begin{cases} u_\alpha = \xi_\alpha - x_3 \partial_\alpha \xi_3 \\ u_3 = \xi_3 \end{cases}$$

b)  $(\tilde{u}, \xi)$  est solution du problème suivant :

$$(8) \quad \begin{cases} -\text{div}(\tilde{\mathcal{A}}e(\tilde{u})) = \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\mathcal{Q}}_\beta = \tilde{\mathcal{Q}} \setminus \omega_\beta \\ \tilde{\mathcal{A}}e(\tilde{u})\tilde{n} = 0 & \text{sur } \partial \tilde{\mathcal{Q}}_\beta \setminus (\omega_\beta^+ \cup \omega_\beta^-) \end{cases}$$

$$(9) \quad \tilde{u}_\alpha = 0 \text{ sur } (\omega_\beta^+ \cup \omega_\beta^-).$$

$$(10) \quad \begin{cases} -\partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(\xi_3) = f_3^0 + (\partial_\alpha f_\alpha^1) - \chi(\omega_\beta) \left\{ \tilde{\mathcal{A}}e(\tilde{u})\tilde{n}^+|_{\omega_\beta^+} + \tilde{\mathcal{A}}e(\tilde{u})\tilde{n}|_{\omega_\beta^-} \right\} \\ \text{dans } \omega. \\ \xi_3 = \partial_\nu \xi_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0 \\ m_{\alpha\beta}(\xi_3) \nu_\alpha \nu_\beta = 0, m_{\alpha\beta}(\xi_3) \nu_\alpha \tau_\beta = 0, -\partial_\alpha m_{\alpha\beta} \nu_\beta = f_\alpha^1 \nu_\alpha \text{ sur } \gamma_1. \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} -\partial_{\alpha} n_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2) = f_{\beta}^0 & \text{dans } \omega \\ \xi_{\alpha} = 0 & \text{sur } \gamma_0 \\ n_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2) \nu_{\alpha} = 0 & \text{sur } \gamma_1 \quad (\gamma_1 = \partial\omega - \gamma_0) \end{cases}$$

$$(12) \quad \tilde{u}_3 \Big|_{\omega_{\beta}^{+}} = \tilde{u}_3 \Big|_{\omega_{\beta}^{-}} = \xi_3 \Big|_{\omega_{\beta}}$$

avec :

$$g^0(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 g(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad g^1(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 x_3 g(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

$$(13) \quad m_{\alpha\beta}(\xi_3) = -\frac{2E}{3(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} \xi_3 + \nu \Delta \xi_3 \delta_{\alpha\beta} \}$$

$$(14) \quad n_{\alpha\beta}(\xi_1, \xi_2) = \frac{2E}{(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) e_{\alpha\beta}(\xi) + \nu e_{\gamma\gamma}(\xi) \delta_{\alpha\beta} \}$$

$$(15) \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Conclusion : On obtient un problème classique d'élasticité tridimensionnelle sur l'ouvert à fente  $\tilde{\mathcal{Q}}_{\beta}$ , un problème de plaque 2D sur  $\omega$ , elliptique du 4<sup>e</sup> ordre (10), qui, à l'addition près du multiplicateur de Lagrange :  $\chi(\omega\beta) \left\{ \tilde{\mathcal{A}}e(\tilde{u})\tilde{n}^{+} \Big|_{\omega_{\beta}^{+}} + \tilde{\mathcal{A}}e(\tilde{u})\tilde{n}^{-} \Big|_{\omega_{\beta}^{-}} \right\}$  correspond aux équations classiques établies pour des plaques seules (par exemple [6]), ainsi que (11), problème de plaque de type "membranaire" (il suffit de réintroduire  $\epsilon$  dans (10) et (11) à l'aide de (5) pour s'en convaincre).

Remarque : Dans toute la suite, on ne conservera comme force que la densité de poids, ce qui entraîne :  $f_{\alpha} = 0$ , et par (11),  $\xi_{\alpha} = 0$  sur  $\omega$ . Tout l'intérêt portera donc sur  $\xi_3$ , et principalement sur ses valeurs à la jonction.

## 2). Une réduction du problème $\mathcal{P}_1$ :

Nous supposons dans ce paragraphe que  $\mathcal{Q}_{\beta}^{\epsilon}$  et  $\Omega^{\epsilon}$  s'étendent à l'infini suivant la direction  $x_2$  :  $a_2 = +\infty$ , et que les données de ce nouveau problème  $\mathcal{P}_2$  sont indépendantes de la variable  $x_2$ .

Nous nous ramenons à l'étude d'une section dans un plan  $x_2$  fixé, ce qui conduit à un problème de jonction 2D.1D.



## 2.1. Passage à une section :

### 2.1.1. Partie massive :

Un problème faisant entrer en jeu  $\mathcal{C}_\beta^\epsilon$  conduirait à utiliser une fonctionnelle du type.

$$(16) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}_\beta^\epsilon} (\tilde{\lambda} e_{pp}(v) e_{qq}(v) + 2\tilde{\mu} e_{ij}(v) e_{ij}(v)) dx^\epsilon - \int_{\mathcal{C}_\beta^\epsilon} f^\epsilon \cdot v dx^\epsilon.$$

L'hypothèse supplémentaire conduisant à  $\mathcal{P}_2$  impliquant la nullité de  $u_2^\epsilon$  et de toutes les dérivées suivant  $x_2$ , on utiliserait une nouvelle fonctionnelle de la forme :

$$(17) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{S_\beta^\epsilon} (\tilde{\lambda} e_{pp}(v) e_{qq}(v) + 2\tilde{\mu} e_{AB}(v) e_{AB}(v)) ds^\epsilon - \int_{S_\beta^\epsilon} f^\epsilon \cdot v ds^\epsilon$$

Les indices majuscules étant pris dans  $\{1,3\}$ ,  $v$  ne dépendant que de  $x_1$  et  $x_3$ ,  $S_\beta^\epsilon$  étant une section de  $\mathcal{C}_\beta^\epsilon$  à  $x_2$  fixé.

On est donc dans le cadre de l'élasticité linéaire bidimensionnelle classique.

### 2.1.2. Partie plaque :

De même, un problème faisant entrer en jeu  $\Omega^\epsilon$  conduirait à utiliser une fonctionnelle du type :

$$(18) \quad J(v) = \frac{E^\epsilon \epsilon^3}{3(1-(\nu^\epsilon)^2)} \int_{\gamma_0 \times ]0, b_1[} \{ (\Delta v)^2 + (1-\nu^\epsilon)^2 (2(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2})^2 - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}) \} ds - \int_{\gamma_0 \times ]0, b_1[} f^\epsilon \cdot v ds.$$

Dans l'hypothèse conduisant à  $\mathcal{P}_2$ , soit  $\gamma_0$  infinie, on utiliserait une nouvelle fonctionnelle de la forme :

$$(19) \quad J(v) = \frac{E^\epsilon \epsilon^3}{3(1-(\nu^\epsilon)^2)} \int_0^{b_1} (\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2})^2 dl - \int_0^{b_1} f^\epsilon \cdot v dl$$

$v$  ne dépendant que de  $x_1$ .

## 2.2 . Implémentation à l'aide de la bibliothèque MODULEF [2] :

### 2.2.1 Partie massive :

Correspondant à (17), on utilisera une triangulation  $P_1$ -Lagrange, d'inconnue aux noeuds  $u_1$  et  $u_3$  .

Nom technique MODULEF : TRIA 2PlD.

### 2.2.2. Partie plaque :

Considérons une poutre "sans cisaillement", déterminée par sa longueur AB, son épaisseur  $2\epsilon$ , sa section S, son module d'Young  $E^\epsilon$  et son moment d'inertie par rapport à  $Ox_2$  de la section normale à la ligne moyenne  $\gamma_0$  au point d'abscisse  $x_1$  ( $I_2 = \int_S x_3^2 dx_2 dx_3$ ).

Un problème posé sur cette poutre conduirait à utiliser une fonctionnelle du type :

$$(20) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_A^B E^\epsilon I_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 dl - \int_A^B f^\epsilon \cdot v dl .$$

Comparons (20) et (19) : on simulera une section de  $\Omega^\epsilon$  par un élément de poutre en imposant :

$$(21) \quad \begin{cases} I_2 = \frac{2 \epsilon^3}{3(1-(\nu^\epsilon)^2)} \\ S = \frac{2 \epsilon}{1-(\nu^\epsilon)^2} \end{cases}$$

les résultats obtenus concerneront donc aussi bien  $\mathcal{P}_2$  qu'un problème  $\mathcal{P}_3$  ayant pour objet la jonction d'une structure élastique bidimensionnelle et d'une poutre (unidimensionnelle).

On choisit en l'occurrence une segmentation de la poutre P3 - Hermite (degrés de liberté aux noeuds :  $u_3$  et  $\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$  )

Nom technique MODULEF : SEGM 2POR

### 2.3. Simulation du raccord :

Outre la condition limite  $u_3^\epsilon = 0$  à l'extrémité encastrée de la partie plaque, il convient de modéliser l'enfichement de la plaque dans le massif par des conditions supplémentaires.

Pratiquement, on génère tout d'abord les deux maillages de façon à faire coïncider sur des droites verticales ( $x_1$  et  $x_2$  fixés) les noeuds de la plaque et ceux de la frontière du massif contigüe à la plaque, comme le montre la figure 6.

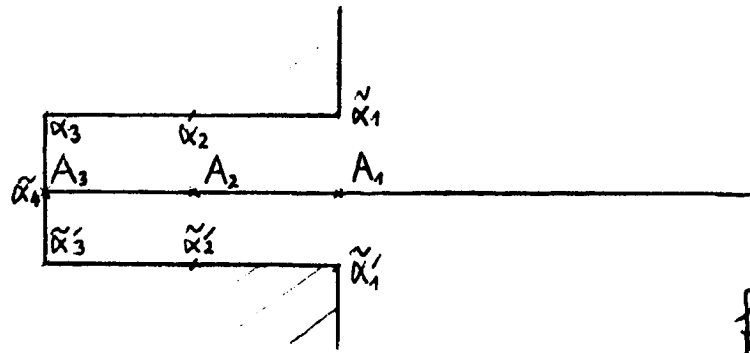


fig 6.

Placés dans le cadre de petites déformations en élasticité linéarisée, nous supposons que la plaque reste solidaire du massif, et nous imposons le déplacement des points  $\tilde{\alpha}_i$  et  $\tilde{\alpha}_i'$  du massif suivant le modèle de Kirchhoff-Love des déplacements de la plaque :

$$(22) \quad u_p^\epsilon(A_3) = u_p^\epsilon(\tilde{\alpha}_4)$$

$$(23) \quad u_3^\epsilon(A_i) = u_3^\epsilon(\tilde{\alpha}_i) = u_3^\epsilon(\tilde{\alpha}_i') \quad i=1,2,3.$$

$$(24) \quad \begin{cases} u_1^\epsilon(\tilde{\alpha}_i) = u_1^\epsilon(A_i) - \epsilon \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_1}(A_i) \\ u_1^\epsilon(\tilde{\alpha}_i') = u_1^\epsilon(A_i) + \epsilon \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial x_1}(A_i) \end{cases} \quad i=1,2,3.$$

Remarque :

.  $A_3$  et  $\tilde{\alpha}_4$  sont deux points géométriquement confondus mais deux noeuds d'éléments finis différents.

. Les conditions (22)-(24) seront utilisées sous forme de combinaisons linéaires dans les résolutions numériques.

#### 2.4. Données numériques :

Nous allons choisir les valeurs numériques des données du problème de façon à respecter les ordres de grandeur impliqués par (6) et (7).

a) Si  $\tilde{\nu}$  est le coefficient de Poisson relatif au massif,  $\nu^\epsilon$  celui relatif à la plaque, nous choisirons :  $\tilde{\nu} = \nu^\epsilon = 0,3$ , ce qui respecte (15).

b) Soit de même  $\tilde{E}$  et  $E^\epsilon$  les modules d'Young relatifs respectivement au massif et à la plaque. D'après (15), il vient :

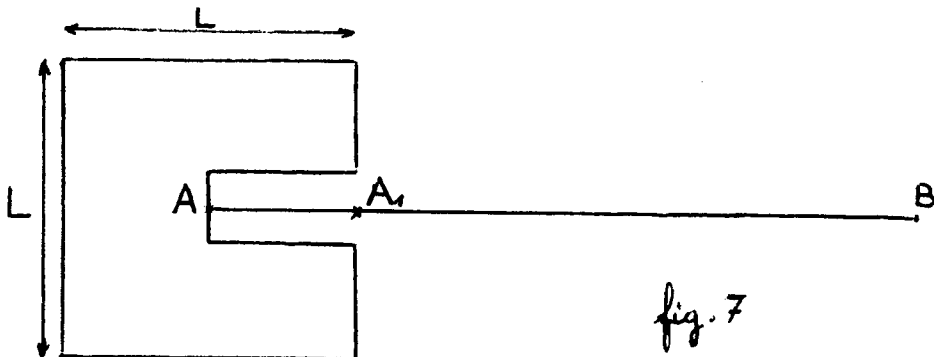
$$\tilde{E} = \frac{\tilde{\mu} (3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} \quad E^\epsilon = \frac{\mu^\epsilon (3\lambda^\epsilon + 2\mu^\epsilon)}{\lambda^\epsilon + \mu^\epsilon} = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \epsilon^{-3}$$

En conséquence, nous choisirons le rapport  $E^\epsilon/\tilde{E}$  de l'ordre de  $\epsilon^{-3}$ .

c) La densité volumique de force  $f_3^\epsilon$  pour la plaque étant de l'ordre de 1, la densité surfacique exprimée sur la surface moyenne sera de l'ordre de  $\epsilon$ , ce qui entraîne que densité volumique de force du massif et densité surfacique de force de la plaque sont du même ordre, i.e.  $O(\epsilon)$ .

#### 2.5. Résultats numériques :

Nous choisirons ici d'étudier le déplacement vertical du point  $A_1$  de coordonnées  $(\beta, 0)$ , suivant différentes valeurs de la longueur d'enfichement  $\beta$ , ceci dans deux cas de figure, où toute valeur autre que  $\beta$  sera constante.



Nous choisirons :

(25)

$$\begin{cases} b_1 - \beta = 4 = A_1 B \\ a_1 + \beta = 2a_3 = 2b_3 = 1 = L \\ \tilde{\nu} = \nu^\epsilon = 0,3 \end{cases}$$

2.5.1. Premier cas de figure .

En plus de (25), nous poserons :

$$\epsilon = 10^{-2}$$

$$E^{\epsilon} = 10^{10} \quad \tilde{E} = 10^4$$

$$f_3^{\epsilon} = -1 \text{ pour les deux parties massive et plaque.}$$

Les valeurs obtenues pour le déplacement vertical de  $A_1$  sont les suivantes :

$\beta$	$-u_3(A_1)$	$\beta$	$-u_3(A_1)$
0,003	0,62677 E-01	0,25	0,68644 E-01
0,005	0,62723 "	0,3	0,69916 "
0,009	0,62816 "	0,35	0,71210 "
0,01	0,62839 "	0,4	0,72525 "
0,05	0,63772 "	0,5	0,75221 "
0,1	0,64958 "	0,6	0,78003 "
0,15	0,66165 "	0,7	0,80871 "
0,2	0,67394 "	0,9	0,86867 "

La figure 8 représente le cas  $\beta = 0,4$  où l'on visualise la déformée en traits forts, la position initiale étant en pointillés.



fig. 8

La figure 9 représente le déplacement vertical du point A<sub>1</sub> fonction du paramètre  $\beta$ .

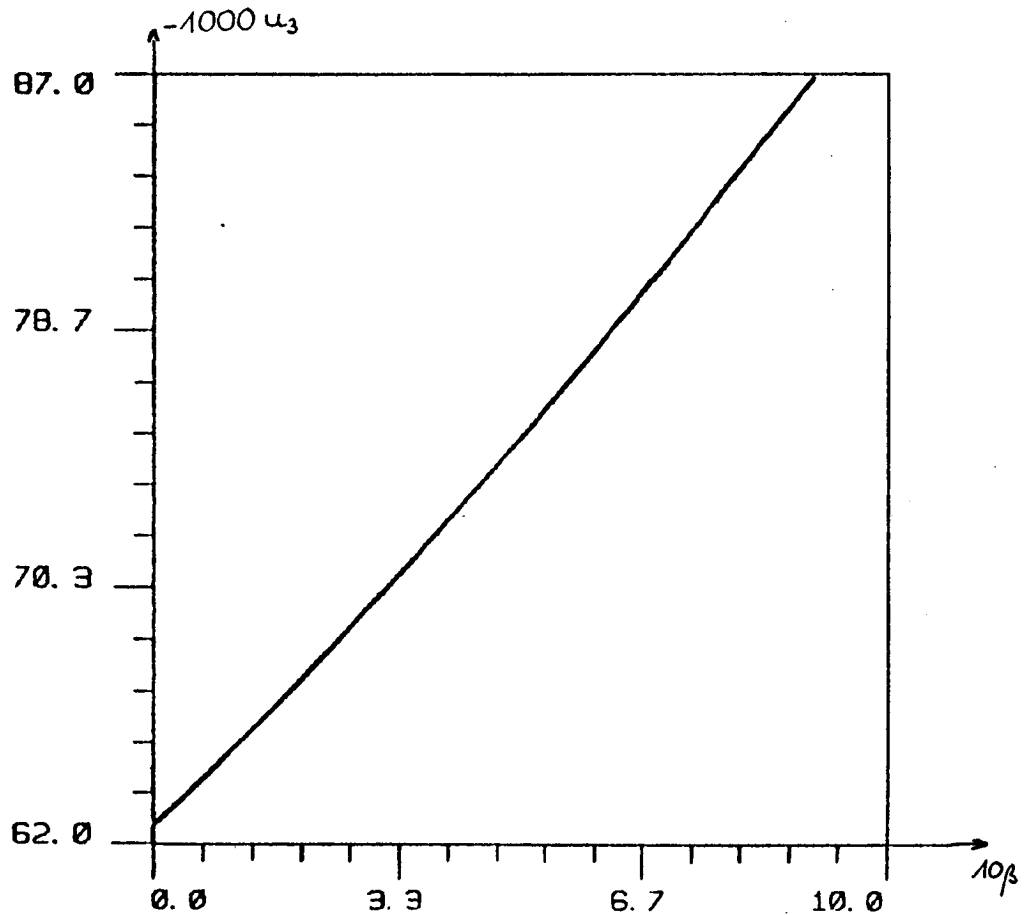


fig. 9.

#### 2.5.2. Deuxième cas de figure :

Nous choisirons ici, en plus de (25) :

$$\epsilon = 10^{-1}$$

$$E^{\epsilon} = 10^7$$

$$\tilde{E} = 10^4$$

$$f_3^{\epsilon} = -10^{-1} \text{ pour le massif}$$

$$f_3^{\epsilon} = -1 \text{ pour la plaque}$$

Ce choix des forces veut diminuer l'importance des densités des matériaux : le système ainsi constitué du massif et de la plaque enfichée a une densité volumique uniforme, indépendante des différentes valeurs de  $\beta$ .

On obtient le tableau suivant :

$\beta$	$-u_3(A_1)$	$\beta$	$-u_3(A_1)$
0,005	$0,35396 \cdot 10^{-1}$	0,2	$0,40054 \cdot 10^{-1}$
0,008	$0,35407 \cdot 10^{-1}$	0,3	0,42602 "
0,01	$0,35454 \cdot 10^{-1}$	0,5	0,47959 "
0,05	$0,36396 \cdot 10^{-1}$	0,7	0,53666 "
0,1	$0,37594 \cdot 10^{-1}$	0,9	0,59723 "

La figure (10) illustre le tableau précédent, et la figure (11) représente le cas  $\beta = 0,05$ , la déformée étant en traits forts, les pointillés représentant la position initiale.

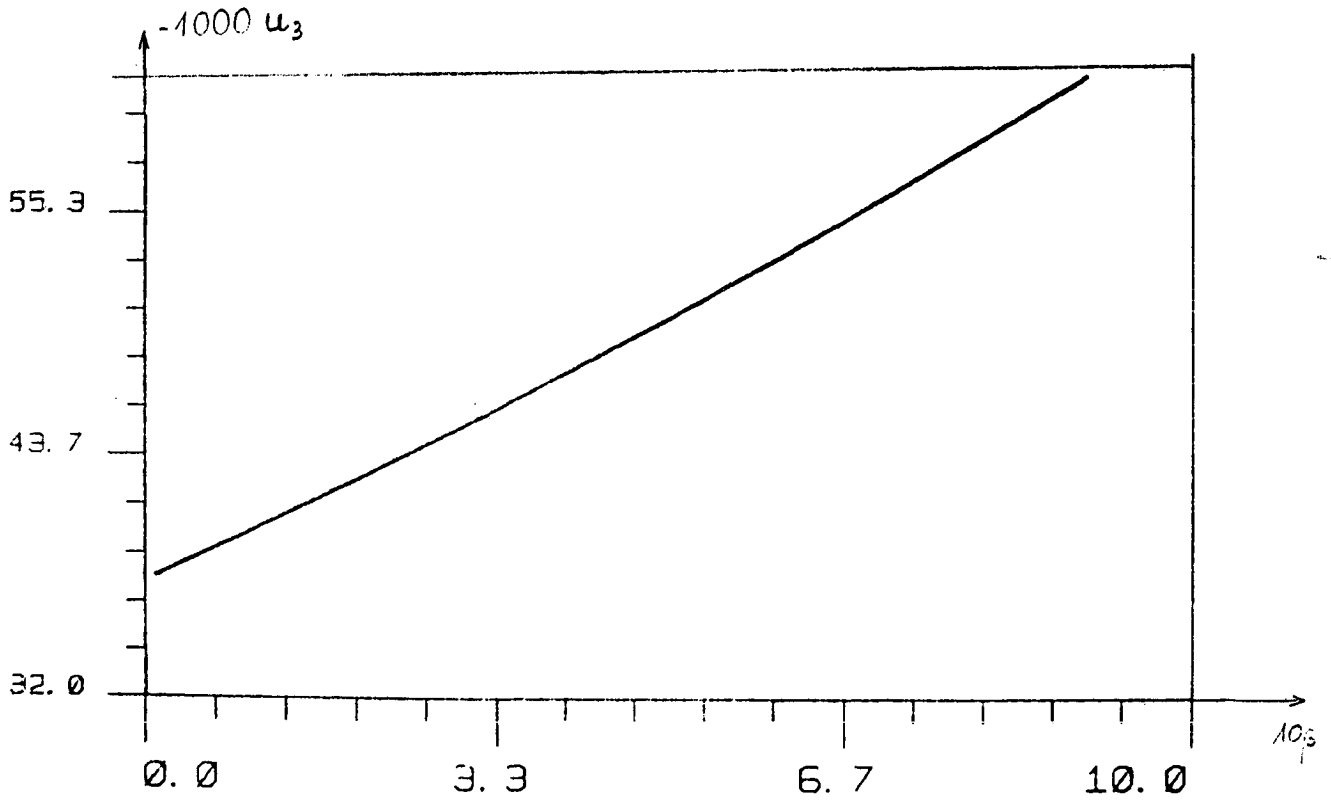


fig. 10

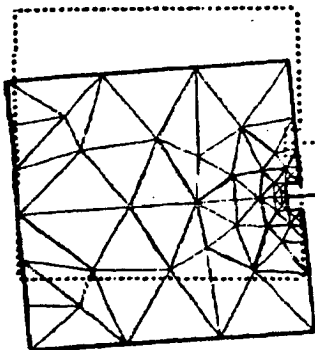


fig. 11

### 2.5.3. Remarques :

Si nous considérons le cas où le paramètre adimensionnel  $\epsilon$  vaut  $10^{-2}$ , nous ne trouvons aucun matériau courant connu possédant les caractéristiques satisfaisantes, du fait de la valeur du rapport  $E^\epsilon/\tilde{E}$ .

Toutefois, si  $\epsilon = 10^{-1}$ , l'acier pour la plaque ( $E^\epsilon \approx 21.10^5 \text{ kg/cm}^2$ ) associé au caoutchouc pour le massif ( $\tilde{E} \approx 0,037.10^5 \text{ kg/cm}^2$ ) conviennent.

Naturellement, la mise en place de la modélisation précédente ne s'oppose pas à un choix quelconque d'autres matériaux; mais les résultats obtenus peuvent révéler des déplacements pour la plaque qui dépassent l'ordre de son épaisseur, ou des déformations qui dépassent le cadre des "petites déformations" de l'élasticité linéarisée.

Notons cependant que les ordres asymptotiques choisis en 1) sont nécessaires pour établir le modèle limite (8)-(15).

## 3. Le problème $\mathcal{P}_1$ :

### 3.1. Formulations variationnelles .

Les fonctionnelles utilisées sont décrites par (16) pour le massif, et (18) pour la plaque.

### 3.2. Implémentation à l'aide de la bibliothèque MODULEF :

#### 3.2.1. Partie massive :

Correspondant à l'expression (16), on utilise une triangulation P1-Lagrange (tétraèdres, inconnues aux noeuds :  $u_1, u_2, u_3$  ).

Nom technique MODULEF : TETR 3P1D.

#### 3.2.2. Partie plaque :

On dispose d'un élément de plaque compatible avec (18), en l'occurrence une triangulation "membrane" P3-Hermite réduite (inconnues aux noeuds :  $u_1, u_2, \partial_1 u_1, \partial_2 u_1, \partial_1 u_2, \partial_2 u_2$ ) associée à une triangulation pour la flexion P3-Hermite réduite (inconnues aux noeuds :  $u_3, \partial_1 u_3, \partial_2 u_3$ ), constituant l'élément de Hsiegh-Clough-Tocher réduit ([1]).

Nom technique MODULEF : TRIA CPH1.



### 3.3. Simulation du raccord :

Outre la condition limite  $u^\epsilon = 0$  en  $\Gamma_0^\epsilon$ , soit  $u_1^\epsilon = 0$  pour les points de la plaque tels que  $x_1 = b_1$ , on utilise des relations linéaires, de façon analogue à ce qui a été fait en 2.3.

On génère les deux maillages de façon à faire coïncider sur des verticales (parallèles à  $Ox_3$ ) les noeuds de la plaque et ceux de la frontière du massif contigüe à la plaque. La figure 6 que l'on reprend est représentative d'une section dans un plan parallèle à  $(Ox_1, Ox_3)$  de ce modèle.

On imposera, par la même remarque qu'en 2.3 :

$$(26) \quad u_1^\epsilon(A_3) = u_1^\epsilon(\tilde{\alpha}_4)$$

$$(27) \quad u_3^\epsilon(A_j) = u_3^\epsilon(\tilde{\alpha}_j) = u_3^\epsilon(\tilde{\alpha}'_j) \quad j = 1, 2, 3.$$

$$(28) \quad \begin{cases} u_\alpha^\epsilon(\tilde{\alpha}_j) = u_\alpha^\epsilon(A_j) - \epsilon \partial_\alpha u_3^\epsilon(A_j) \\ u_\alpha^\epsilon(\tilde{\alpha}'_j) = u_\alpha^\epsilon(A_j) + \epsilon \partial_\alpha u_3^\epsilon(A_j) \end{cases} \quad j = 1, 2, 3.$$

### 3.4. Données numériques :

L'étude est identique à celle du paragraphe 2.4 ainsi que ses conclusions.

### 3.5. Résultats numériques :

Nous choisirons de faire la même étude qu'en 2.5.

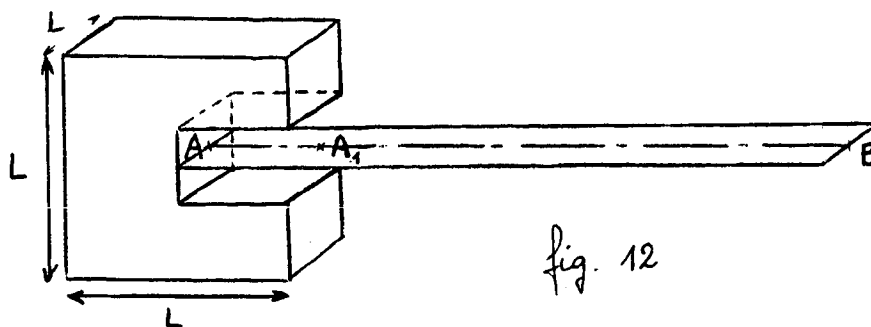


fig. 12

Nous choisirons en plus de (25) :

$$(29) \quad \begin{cases} (25) \\ 2a_2 = 1 = L \end{cases}$$

Les résultats étant sensiblement les mêmes que ceux recueillis en 2.5, nous nous contenterons du cas suivant :

$$\epsilon = 10^{-2}$$

$$E^{\epsilon} = 10^{10}$$

$$\tilde{E} = 10^4$$

$$f_s^{\epsilon} = -1 \text{ pour le massif et pour la plaque.}$$

les valeurs obtenues pour le déplacement vertical de  $A_1$  sont les suivantes :

$\beta$	$-u_3(A_1)$	$\beta$	$-u_3(A_1)$
0,1	$0,68439 \cdot 10^{-1}$	0,5	$0,7978 \cdot 10^{-1}$
0,2	$0,71011 \quad "$	0,7	$0,85771 \quad "$
0,3	$0,74043 \quad "$	0,9	$0,92194 \quad "$

La figure 13 illustre ce tableau de valeurs. Les figures 14, 15 et 16 représentent respectivement la position au repos, la déformée du système, et leur superposition, pour  $\beta = 0,5$ .

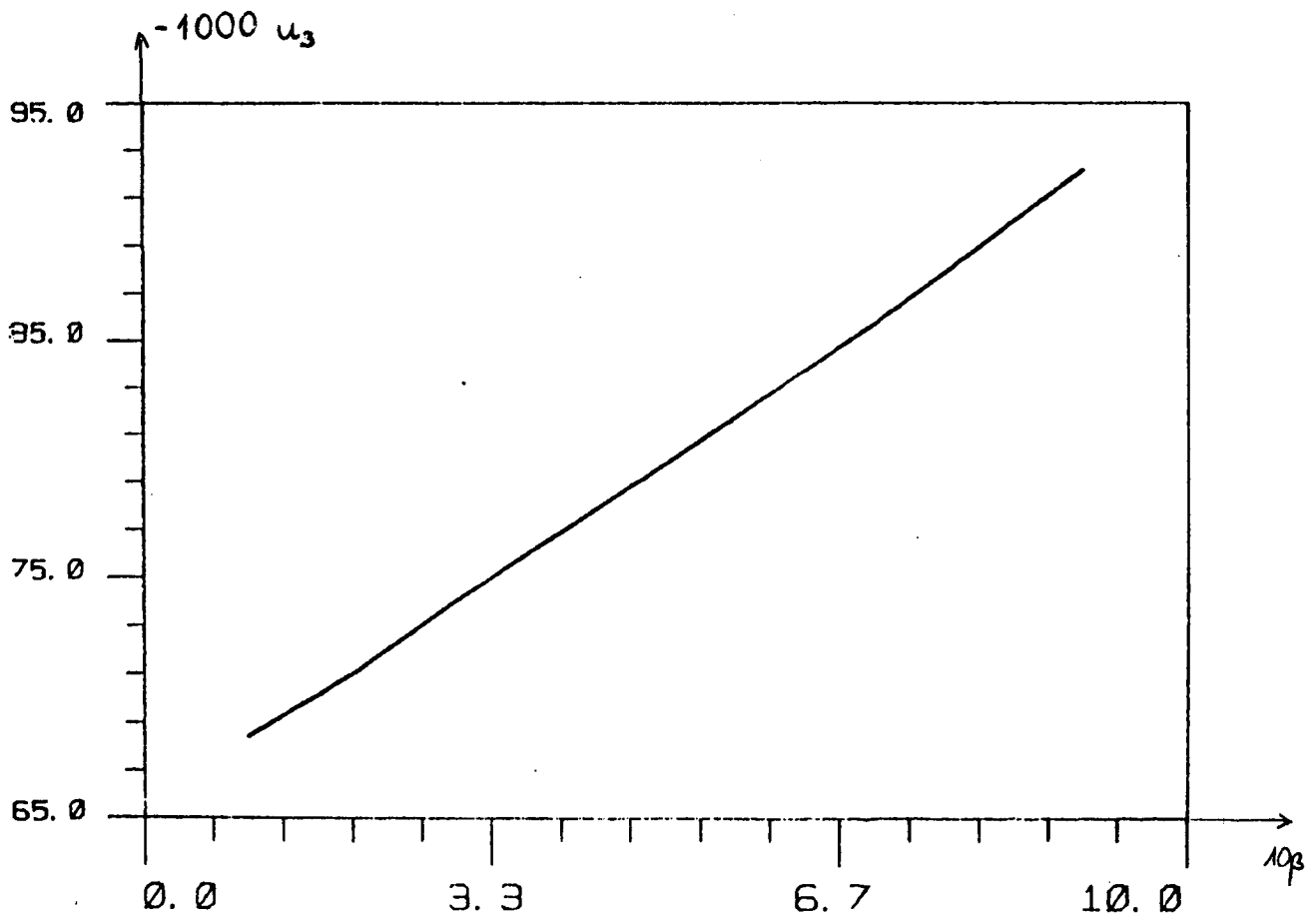


fig. 13

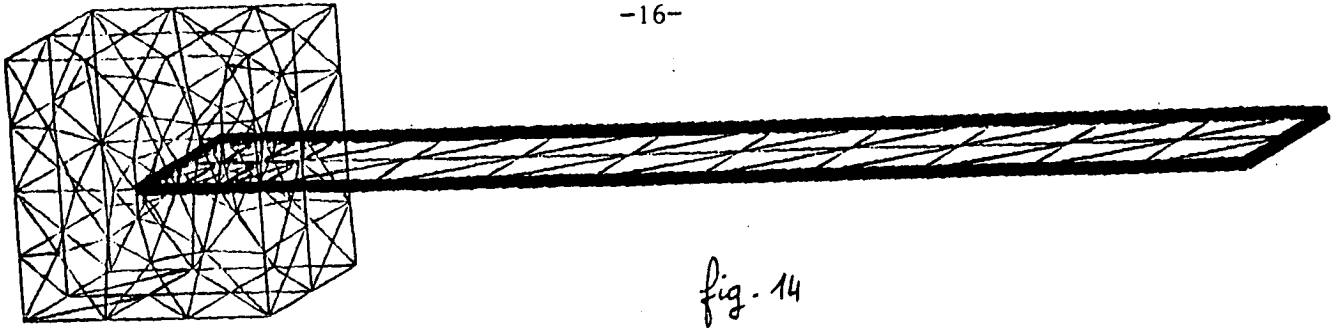


fig. 14

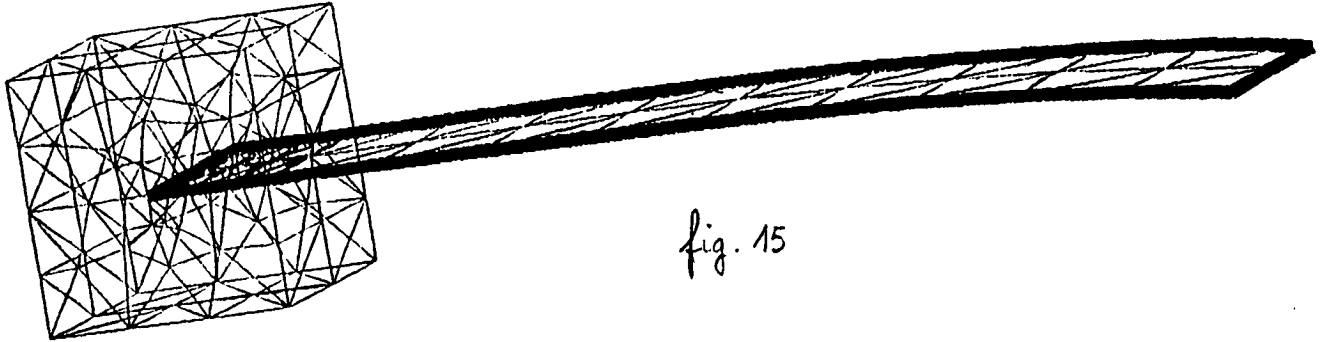


fig. 15

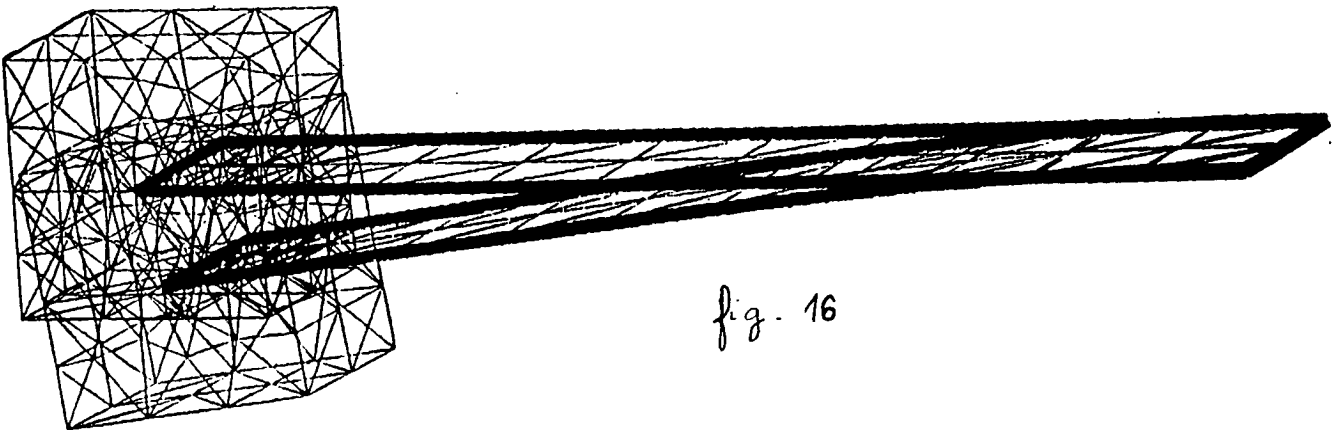


fig. 16

Remarque : Il est beaucoup plus difficile d'obtenir des résultats cohérents en configuration tridimensionnelle pour des petites valeurs de  $\beta$ . En effet, on a construit les tétraèdres découpant le massif en maillant une section (on prend par exemple un maillage construit en 2) que l'on a reporté par translation suivant  $Ox_2$  un certain nombre de fois, créant ainsi un maillage en pentaèdres découpés ensuite en tétraèdres. Pour des petites valeurs de  $\beta$  surgissent deux difficultés :

- si l'on conserve un petit nombre de sections en profondeur, les éléments tétraédriques situés autour de la fissure auront une base trop petite par rapport à la hauteur.
- si au contraire, on augmente le nombre de sections à profondeur imposée, le nombre d'éléments en est d'autant multiplié, le temps de calcul et la place mémoire utilisés deviennent inacceptables.

#### 4. Conclusion :

La modélisation de la jonction de structures de dimensions différentes utilisée ici donne un moyen de surmonter la difficulté qu'il y avait au départ à "raccorder" deux éléments finis distincts.

L'étude bidimensionnelle donnant des résultats en tout semblables à l'étude tridimensionnelle, elle peut être utilisée à des fins simplificatrices pour une première série de tests dans le cas de données symétriques seulement.

Enfin, les courbes obtenues, déplacement vertical  $u$  du point  $A_1$  fonction de  $\beta$ , laisseraient penser qu'il existe une limite pour  $u$  lorsque  $\beta$  tend vers zéro.

## REFERENCES

- [1] : M. Bernadou, J.M. Boissarie, K. Hassan.  
"Sur l'implémentation des éléments finis de Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit" Rapport de recherche INRIA n° 4 1980.
- [2] : M. Bernadou, P.L. George, A. Hassim, P. Joly, P. Laug, A. Perronnet E. Saltel, D. Steer, G. Vanderborck, M. Vidrascu.  
MODULEF, "Une bibliothèque d'éléments finis". INRIA éditeur 1985.
- [3] : P.G. Ciarlet  
"Modeling and numerical analysis of junctions between elastic structures", Proceedings ICIAM 87 : First International Conference on Industrial and Applied Mathematics, Paris, June 29-July 3, 1987.
- [4] : P.G. Ciarlet, H. Le Dret, R. Nzungwa.  
"Junctions between three-dimensional and two-dimensional linearly elastic structures " à paraître.
- [5] : P.G. Ciarlet, H. Le Dret, R. Nzungwa.  
"Modélisation de la jonction entre un corps élastique tridimensionnel et une plaque" note présentée par J.L. Lions  
C.R. Acad. Sci. Paris, t.305, Série I, p.55-58, 1987.
- [6] : P. Destuynder.  
"Une théorie asymptotique des plaques" Masson 1986.

